Εισαγωγή στην Τοπολογία

22/2/2018

1η Διάλεξη

Ώρες γραφείου 501ε (μετά το μάθημα)

Μετρικός χώρος:
Μετρικοί χώροι ορισμοί.
παραδείγματα, βασικές ιδιότητες

1.1 Ορισμός Έστω $X \neq \emptyset$ ένα σύνολο
Ονομάζουμε μετρική στο X κάθε συνάρτηση $\rho: X \times X \to \mathbb{R}$ ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες:

α) $\rho(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$ και $\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

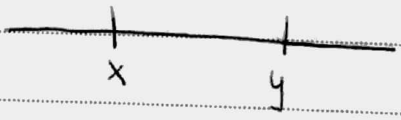
β) $\rho(y,x) = \rho(x,y) \quad \forall\, x,y \in X$ (συμμετρική ιδιότητα)

γ) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \quad \forall\, x,y,z \in X$ (τριγωνική ανισότητα)

Όταν η ρ είναι μετρική στο X το ζεύγος (X,ρ) καλείται μετρικός χώρος. Τα στοιχεία του X καλούνται και σημεία του μετρικού χώρου.
Η ποσότητα $\rho(x,y)$ ονομάζεται απόσταση του x από το y.
Συνήθως τις μετρικές τις συμβολίζουμε με γράμματα όπως ρ, d, σ, δ,
Πολλές φορές όταν η μετρική εννοείται θα λέμε "Ο μετρικός χώρος X"

1.2 Παράδειγμα

$\rho: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



Είναι το αρχέτυπο παράδειγμα μ.χ

α) $\rho(x,y) = |x-y| \geq 0$

$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow |x-y| = 0 \Leftrightarrow x-y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

β) $\rho(y,x) = |y-x| = |-(x-y)| = |x-y| = \rho(x,y)$

γ) $\rho(x,z) = |x-z| = |(x-y)+(y-z)| \leq |x-y| + |y-z| = \rho(x,y) + \rho(y,z)$

$\forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$

Η παραπάνω ρ καλείται συνήθης μετρικός στο $\mathbb{R}$

Η ευκλείδεια μετρική στον $\mathbb{R}^k$ ($\mathbb{R}^n$)

Στον $\mathbb{R}^k = \{ (x_1, \dots, x_k) \quad x_i \in \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, k \}$

για $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k)$

$$p_2(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\sum_{i=1}^{k} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$$

Οι ιδιότητες α), β) αποδεικνύονται άμεσα. Απομένει να δειχθεί η τριγωνική ανισότητα (θα δούμε παρακάτω)

1.4 Η διακριτή μετρική.

Έστω X τυχόν μη κενό σύνολο

Ορίζουμε $p: X \times X \to \mathbb{R}$ με $p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$

1.5 Αν (X, p) ένας μετρικός χώρος και A μη κενό υποσύνολο του X. ο περιορισμός της p στο $A \times A$ ονομάζεται σχετική μετρική στο A από το p.

Έστω $p_A : A \times A \to \mathbb{R}$ με $p_A(x,y) = p(x,y) \quad \forall \, x, y \in A$.

Έτσι π.χ.

Κάθε μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ είναι μετρικός χώρος με τη σχετική μετρική που επάγει σε αυτό η συνήθης μετρική του $\mathbb{R}$

Ομοίως αν $\emptyset \subsetneq A \subsetneq \mathbb{R}^k$ το A με τη σχετική μετρική που επάγει σε αυτό η ευκλείδεια μετρική , (γίνεται μετρικός χώρος)

Μετρικές σε διανυσματικούς χώρους που ορίζονται από νόρμες.

Υπενθυμίζουμε την έννοια του πραγματικού διανυσμ. χώρου.

1.6 Ορισμός Πραγματικός διανυσματικός χώρος (ή γραμμικός χώρος)

Ονομάζεται μια τριάδα $(X, +, \cdot)$ όπου X σύνολο.

$+ : X \times X \to X$ μια εσωτερική πράξη (πρόσθεση) $(x,y) \mapsto x+y$

$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X$ μια εξωτερική πράξη (βαθμωτό γινόμενο) $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

ωστε να ισχυουν τα εξης.

i) $x+y=y+x \quad \forall\ x,y\in X$

ii) $(x+y)+z=x+(y+z) \quad \forall x,y,z\in X$

iii) $\exists\ 0\in X \quad x+0=0+x=x \quad \forall\ x\in X$

iv) $\forall x\in X \quad \exists(-x)\in X \quad x+(-x)=(-x)+x=0$

v) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y \quad \forall\ x,y\in X\ ,\ \forall\ \lambda\in\mathbb{R}$

vi) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x \quad \forall x\in X\ ,\ \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

vii) $(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x) \quad \forall\ x\in X \quad \forall\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}$

viii) $1\cdot x=x \quad \forall\ x\in X$.

Παραδειγματα.

1.7 ο $\mathbb{R}^k$ με πραξεις κατα σημειο.

1.8 ο χωρος όλων των πολυωνυμων με πραγματικους συντελεστες

1.9 ο χωρος όλων των πολυωνυμων βαθμου $\leq k$ (διαστασην $k+1$)

1.10 Αν $X\neq\emptyset$ ο $F(x)=\{f:X\to\mathbb{R}\ \ f\ \text{συναρτηση}\}$ είναι διανυσματικός χωρος με πραξεις κατα σημειο (απειρος διαστασης)

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$

$(\lambda f)(x)=\lambda\cdot f(x)$

1.11 Αν $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$

$C[\alpha,\beta]=\{f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}\ \ f\ \text{συνεχης}\}$ είναι διανυσματικός χωρος με πραξεις κατα σημειο.

1.12 $C_{00}(\mathbb{N})=\left\{(a_1,a_2,\dots)\ \ a_i\in\mathbb{R}\ \ \exists\ i_0\in\mathbb{N}\ \ a_i=0\ \ \forall\ i>i_0\right\}$ Είναι Δ.χ. με πραξεις κατα σημειο.

1.13 Ορισμός Έστω X πραγματικός Δ.Χ.
Ονομάζουμε νόρμα (ή στάθμη) μια συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \|x\|$
ώστε να ικανοποιούνται οι παρακάτω ιδιότητες.

α) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in X$ και $\|x\| = 0 \iff x = 0$

β) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\| \quad \forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

γ) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X$ (τριγωνική ανισότητα)

Αν $\|\cdot\|$ μια νόρμα στο X το ζεύγος $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος με νόρμα

1.14 Μετρική που επάγεται από νόρμα.
Αν $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα η απεικόνιση $p = p_{\|\cdot\|} : X \times X \to \mathbb{R}$ με τύπο
$p(x,y) = \|x-y\|$ είναι μετρική στον X.

Πράγματι: α) $p(x,y) = \|x-y\| \geq 0$ από το α) του ορισμού της νόρμας

$$p(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0 \iff x-y = 0 \iff x = y$$

β) $p(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1| \, \|x-y\| = 1 \, \|x-y\| = p(x,y)$
από το β) του ορισμού της νόρμας

γ) $p(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leq \|x-y\| + \|y-z\|$
$= p(x,y) + p(y,z)$
από το γ) του ορισμού της νόρμας

1.15 Παραδείγματα: Η $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια νόρμα στο $\mathbb{R}$.

1.16 Παράδειγμα Η ευκλείδεια νόρμα $\| \ \|_2$ στον $\mathbb{R}^k$
Για $\bar{x} = (x_1, \dots x_k) \in \mathbb{R}^k$, $\|\bar{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{k} x^2 \right)^{1/2}$

1.17 Στον $\mathbb{R}^k$ η $\| \ \|_1$ ορίζεται ως εξής.
Για $\bar{x} = (x_1, \dots x_k) \in \mathbb{R}^k$ $\quad \|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$

1.18 Η $\| \ \|_\infty$ στον $\mathbb{R}^\kappa$ ορίζεται ως εξής

Για $\bar{x} = (x_1, \dots x_\kappa)$ $\quad \|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_i| \quad i = 1, 2, \dots \kappa\}$

Προφανώς $\|\bar{x}\|_\infty \geq 0$

a

α) $\|\bar{x}\|_\infty = 0 \iff |x_i| = 0, \ i = 1, \dots \kappa \iff x_i = 0 \quad i = 1, \dots \kappa \iff \bar{x} = 0$

β) $$\|\lambda\bar{x}\|_\infty = \|(\lambda x_1, \dots \lambda x_\kappa)\|_\infty = \max\{|\lambda x_i| \quad i = 1, \dots, \kappa\}$$
$$= \max\{|\lambda||x_i| \quad i = 1, \dots \kappa\}$$
$$= |\lambda| \max\{|x_i| \quad i = 1, \dots \kappa\} = |\lambda| \, \|x\|_\infty$$

γ) Έστω $\bar{x} = (x_1, \dots, x_\kappa)$, $\bar{y} = (y_1, \dots, y_\kappa)$

Για κάθε $i = 1, \dots, \kappa$

$$|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|\bar{x}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty$$

Άρα $\|\bar{x} + \bar{y}\|_\infty = \max\{|x_i + y_i| \quad i = 1, \dots, \kappa\} \leq \|\bar{x}\|_\infty + \|\bar{y}\|_\infty$

1.2

1.19 Παράδειγμα Αν $1 < p < \infty$ η $\| \ \|_p$ ορίζεται στον $\mathbb{R}^\kappa$ ως εξής

Για $\bar{x} = (x_1, \dots, x_\kappa)$

$$\|\bar{x}\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\kappa} |x_i|^p \right)^{1/p}$$

Για να δείξουμε ότι οι $\| \ \|_p$ $1 < p < \infty$ είναι πραγματικές νόρμες

i το μόνο δύσκολο είναι η τριγωνική ανισότητα.

Θα γίνει η απόδειξη μόνο για $p = 2$.

ε 1.20 Ανισότητα Cauchy-Schwartz

Έστω $x_1, \dots, x_\kappa, y_1, \dots, y_\kappa$ πραγματικοί αριθμοί

τότε $$\sum_{i=1}^{\kappa} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{\kappa} |x_i|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{\kappa} |y_i|^2 \right)^{1/2}$$

ii)

<u>Αποδ</u> Θέτουμε $B = \sum_{i=1}^{\kappa} |x_i y_i|$, $A = \sum_{i=1}^{\kappa} |x_i|^2$, $C = \sum_{i=1}^{\kappa} |y_i|^2$

Θέλαμε ν.δ.ο $B^2 \leq AC$ ή ισοδύναμα $(2B)^2 \leq 4AC$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$$P(\lambda) = (\lambda|x_1| + |y_1|)^2 + \dots + (\lambda|x_k| + |y_k|)^2 = \sum_{i=1}^{k} (\lambda|x_i| + |y_i|)^2$$

Παρατηρούμε ότι $P(\lambda) \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \left(\lambda^2 |x_i|^2 + |y_i|^2 + 2\lambda |x_i y_i|\right)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^2\right) \cdot \lambda^2 + 2 \sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| \lambda + \sum_{i=1}^{k} |y_i|^2$$

$$= A\lambda^2 + 2B\lambda + C$$

Περιπτώσεις: → Αν $A = 0$ τότε $x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0$. η ζητούμενη ανισότητα ισχύει (ως ισότητα)

→ Υποθέτουμε ότι $A > 0$ (διακρίνουσα $\Delta \leq 0$)

Τότε το $P(\lambda)$ είναι τριώνυμο με συντελεστή του λ^2 θετικό και $P(\lambda) \geq 0 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$ άρα έχει διακρίνουσα ≤ 0.

Άρα $(2B)^2 - 4AC \leq 0 \Rightarrow B^2 \leq AC$.

1.21 Η $\| \ \|_2$ είναι πραγματική νόρμα.

Απομένει να δειχθεί η τριγωνική ανισότητα (οι άλλες δύο ιδιότητες προκύπτουν εύκολα)

Αν $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k$ $\bar{y} = (y_1, \dots, y_k) \in \mathbb{R}^k$

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} |x_i + y_i|^2 = \sum_{i=1}^{k} \underbrace{|x_i|^2}_{x_i^2} + 2x_i y_i + \underbrace{|y_i|^2}_{y_i^2}$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{i=1}^{k} y_i^2 \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k} |x_i y_i| + \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

$$\leq \|\bar{x}\|_2^2 + 2\|\bar{x}\|_2 \|\bar{y}\|_2 + \|\bar{y}\|_2^2 = \left(\|\bar{x}\|_2 + \|\bar{y}\|_2\right)^2 \Longrightarrow$$

ανισότητα Cauchy-Schwartz

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|_2 \leq \|\bar{x}\|_2 + \|\bar{y}\|_2$$

Για $1<p<\infty$ με $p\neq 2$ η απόδειξη είναι δύσκολη και στηρίζεται στις ανισότητες Holder και Minkowski.

1.22 Αν $\alpha<\beta$ στον $C[\alpha,\beta]=\{f\ [\alpha,\beta]\to\mathbb{R}\ f \text{ συνεχής}\}$
η $\|\ \|_\infty$ ορίζεται ως εξής.
$\|f\|_\infty=\sup\{|f(t)|\ t\in[\alpha,\beta]\}=\max\{|f(t)|\ t\in[\alpha,\beta]\}$

Αποδεικνύουμε την τριγωνική ανισότητα
Έστω $f,g\in C[\alpha,\beta]$. Τότε $\forall\, t\in[\alpha,\beta]$ $|(f+g)(t)|=|f(t)+g(t)|\leq|f(t)|+|g(t)|$
$\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$

Άρα $\|f+g\|_\infty\leq\|f\|_\infty+\|g\|_\infty$
Επίσης ορίζονται $\|\ \|_p$ $1\leq p<\infty$ ως εξής: $\|f\|_p=\left(\int_\alpha^\beta|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$

1.23 <u>Άσκηση</u> Έστω (X,ρ) μετρικός χώρος
Να δειχθεί ότι.
i) $|\rho(\alpha,\beta)-\rho(\alpha,\gamma)|\leq\rho(\beta,\gamma)$ $\forall\ \alpha,\beta,\gamma\in X$
ii) $|\rho(\alpha,\beta)-\rho(\gamma,\delta)|\leq\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\beta,\delta)$ $\forall\ \alpha,\beta,\gamma,\delta\in X$.

Απόδειξη
i) $\rho(\alpha,\beta)\leq\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\beta)=\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\beta,\gamma)\Rightarrow\rho(\alpha,\beta)-\rho(\alpha,\gamma)\leq\rho(\beta,\gamma)$
τριγωνική ανισότητα — συμμετρική ιδιότητα — (1)

Επίσης $\rho(\alpha,\gamma)\leq\rho(\alpha,\beta)+\rho(\beta,\gamma)$ (2)
Από (1), (2) $\Rightarrow$ $|\rho(\alpha,\beta)-\rho(\alpha,\gamma)|\leq\rho(\beta,\gamma)$

τριγωνική ανισότητα — συμμετρική ιδιότητα
ii) $\rho(\alpha,\beta)\leq\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\beta)\leq\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\delta)+\rho(\delta,\beta)=\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\gamma,\delta)+\rho(\beta,\delta)$
$\Rightarrow$ $\rho(\alpha,\beta)-\rho(\gamma,\delta)\leq\rho(\alpha,\gamma)+\rho(\beta,\delta)$ (3)

Επίσης $\rho(\gamma,\delta) \leq \rho(\gamma,\alpha) + \rho(\alpha,\delta) \leq \rho(\gamma,\alpha) + \rho(\alpha,\beta) + \rho(\beta,\delta) = \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\alpha,\beta) + \rho(\beta,\delta)$

$\Rightarrow \rho(\gamma,\delta) - \rho(\alpha,\beta) \leq \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\beta,\delta)$ (4)

Από (3), (4) $\Rightarrow |\rho(\alpha,\beta) - \rho(\gamma,\delta)| \leq \rho(\alpha,\gamma) + \rho(\beta,\delta)$

1.24 Άσκηση Έστω (X,ρ) μ.χ.

Ορίζουμε $d: X \times X \to \mathbb{R}$ με $\boxed{d(x,y) = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}}$

Ν.δ.ο η d είναι μετρική στο X.

Αποδ

Προφανώς • $d(x,y) \geq 0 \quad \forall x,y \in X$ και $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = 0 \Leftrightarrow$

$\rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

• $d(y,x) = \dfrac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)} = \dfrac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} = d(x,y)$

• Παρατηρούμε ότι $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{αν } \rho(x,y) = 0 \\ \dfrac{1}{1+\frac{1}{\rho(x,y)}} & \text{αν } \rho(x,y) \neq 0 \end{cases}$

Έστω $x,y,z \in X$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας x,y,z διαφορ. μεταξύ τους)

Αν x,y,z δύο από αυτά είναι ίσα μεταξύ τους, τότε η τριγωνική ανισότητα προκύπτει άμεσα.

Υποθέτουμε ότι $x \neq y \neq z \neq x$

$\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z) \Rightarrow \dfrac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)} + 1 \leq \dfrac{1}{\rho(x,z)} + 1$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\frac{1}{\rho(y,z)} + 1} \leq \dfrac{1}{\frac{1}{\rho(x,y)+\rho(y,z)} + 1}$

$$\frac{1}{\frac{1}{p(x,y)+p(y,z)}+1} \qquad 1+p(x,y)+p(y,z)$$

$$= \frac{p(x,y)}{1+p(x,y)+p(y,z)} + \frac{p(y,z)}{1+p(x,y)+p(y,z)}$$

$$\leq \frac{p(x,y)}{1+p(x,y)} + \frac{p(y,z)}{1+p(y,z)} = d(x,y)+d(y,z)$$

h/w

Ασκηση Εστω (X,p) μετρικός χωρος
Ορίζουμε $d: X\times X \to \mathbb{R}$ με $d(x,y)=\min\{1, p(x,y)\}$
ΝΔ.ο η d ειναι μετρική στο X